Regeln für die normale Substitution (Tabelle)

1.Regeln für die Substitution von Produkten

	Integraltyp	Substitution	Beispiel
1a	Der zweite Faktor ist die Ableitung des ersten Faktors: $\boxed{\int f(x)\cdot f'(x)\,dx}$	$u=f(x)$ $dx=\dfrac{du}{f'(x)}$	$\int \sin x\cdot\cos x\,dx$ $\boxed{u=\sin x} \Rightarrow \boxed{dx=\dfrac{du}{\cos x}}$ $\int u\,du = \dfrac{u^2}{2}+c$ Rücksubst.: $\frac{1}{2}(\sin x)^2 + c$
1b	Zweiter Faktor ist die Ableitung der inneren Funktion des 1.Faktors: $\boxed{\int g[f(x)]\cdot f'(x)\,dx}$	$u=f(x)$ $dx=\dfrac{du}{f'(x)}$	$\int \ln(\sin x)\cdot\cos x\,dx$ $\boxed{u=\sin x} \Rightarrow \boxed{dx=\dfrac{du}{\cos x}}$ Ergibt: $\int \ln u\,du = u\cdot\ln u - u + c$ Rücksub.: $\sin x\cdot\ln(\sin x)-\sin x + c$
1c	In beiden Faktoren steht die gleiche, lineare Funktion: $\boxed{\int g[ax+b]\cdot h[ax+b]\,dx}$	$u=ax+b$ $dx=\dfrac{du}{a}$	$\int \sin(2x+1)\cdot\cos(2x+1)\,dx$ $\boxed{u=2x+1} \Rightarrow \boxed{dx=\dfrac{du}{2}}$ $\dfrac{1}{2}\int \sin u\cdot\cos u\,du = \dfrac{(\sin u)^2}{2\cdot 2}+c$ Rücksub.: $\dfrac{[\sin(2x+1)]^2}{4}+c$
1d	Lineare Funktion mal Potenz einer linearen Funktion: $\boxed{\int (ax+b)\cdot(cx+d)^r\,dx \text{ mit: } r\in\mathbb{R}}$	$u=cx+d$ $dx=\dfrac{du}{c}$	
1e	Lineare Funktion mal Wurzel aus einer linearen Funktion: $\boxed{\int (ax+b)\cdot\sqrt{cx+d}\,dx}$	<u>1e ist nur ein Sonderfall von 1d:</u> Schreibe die Wurzel als eine "Potenz mit rationalem Exponenten", dann kannst du die vorige Formel 1d anwenden.	
1f	$\boxed{\int x^{2n-1}\cdot g(x^n)\,dx}$	$u=x^n$ $dx=\dfrac{du}{x^{n-1}}$	$\int x^{199}\cdot\sin(x^{100})\,dx$ $\dfrac{1}{100}\int u\cdot\sin(u)\,du$ Rest mit Partieller Substitution lösen

2.Regeln für die Substitution verketteter Funktionen

	Integraltyp	Substitution	Beispiel
2a	Der Integrand ist eine verkettete Funktion und die innere Funktion ist eine lineare Funktion: $\boxed{\int g[ax+b]\,dx}$	$u = ax + b$ $dx = \frac{du}{a}$	$\int \sin(2x+1)\,dx$ $\boxed{u = 2x+1} \Rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{2}}$ $\frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{\cos u}{2} + c$ Rücksub.: $-\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c$
2b	Der Integrand ist eine zweimal verkettete Funktion und die innere Funktion ist eine lineare Funktion: $\boxed{\int h\{g[ax+b]\}\,dx}$	$u = ax + b$ $dx = \frac{du}{a}$	$\int [\sin(2x+1)]^2\,dx$ $\boxed{u = 2x+1} \Rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{2}}$ $\frac{1}{2}\int (\sin u)^2\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u\right] + c$ Rücksub.: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x+2) + c$

3.Regeln für die Substitution von Brüchen:

	Integraltyp	Substitution	Beispiel
3a	Der Zähler ist die Ableitung des Nenners: $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx}$	$u=f(x)$ $dx=\frac{du}{f'(x)}$	$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$
3b	Der Zähler ist die Ableitung der inneren Funktion des Nenners: $\boxed{\int \frac{f'(x)}{g\left[f(x)\right]}\,dx}$	$u=f(x)$ $dx=\frac{du}{f'(x)}$	$\int \frac{\cos x}{\ln(\sin x)}\,dx$
3c	Der Nenner ist der Kehrwert der Ableitung des Zählers: $\boxed{\int \frac{f(x)}{\left[f'(x)\right]^{-1}}\,dx}$	$u=f(x)$ $dx=\frac{du}{f'(x)}$	$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
3d	Der Nenner ist der Kehrwert der Ableitung der inneren Funktion des Zählers: $\boxed{\int \frac{g\left[f(x)\right]}{\left[f'(x)\right]^{-1}}\,dx}$	$u=f(x)$ $dx=\frac{du}{f'(x)}$	$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
3e	Die beiden inneren Funktionen in Zähler und Nenner sind gleich und auch linear: $\boxed{\int \frac{g(ax+b)}{h(ax+b)}\,dx}$ g und h dürfen auch wegfallen	$u=ax+b$ $dx=\frac{du}{a}$	
3f	Im Zähler steht eine Funktion mit x^2 als innerer Funktion. Im Nenner steht x: $\boxed{\int \frac{g(x^n)}{x}\,dx}$	$u=x^n$ $dx=\frac{du}{x^{n-1}}$	Regel hat vorwiegend theoretischen Wert, da konkrete Beispiele für die Funktion g auf (elementar) unlösbare Integrale führen

Hinweis: Ist der Zähler gleich 1, dann benutze Regeln für Kehrwerte

4.Regeln für die Substitution von Kehrwerten:

	Integraltyp	Substitution	Beispiel
4a	Der Zähler ist gleich 1. Im Nenner ist der eine Faktor der Kehrwert der Ableitung des anderen Faktors: $\boxed{\int \frac{1}{f(x)\cdot[f'(x)]^{-1}}dx}$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\int \frac{1}{\ln(x)\cdot x}dx$
4b	Der Zähler ist gleich 1. Im Nenner ist der eine Faktor der Kehrwert der Ableitung der inneren Funktion des anderen Faktors: $\boxed{\int \frac{1}{g[f(x)]\cdot[f'(x)]^{-1}}dx}$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\int \frac{1}{[\ln(x)]^2\cdot x}dx$ $\ln x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{\frac{1}{x}}$ Ergibt : $\int \frac{1}{u^2}du$
4c	Zähler ist gleich 1, Nenner ist eine lineare Funktion: $\boxed{\int \frac{1}{ax+b}\,dx}$	$u = ax+b$ $dx = \frac{du}{a}$	$\int \frac{1}{2x+3}\,dx$
4d	Zähler ist gleich 1, der Nenner ist eine verkettete lineare Funktion: $\boxed{\int \frac{1}{g[ax+b]}dx}$	$u = ax+b$ $dx = \frac{du}{a}$	$\int \frac{1}{\cos(2x+3)}\,dx$
4e	Nenner ist eine mehrfach verkettete Funktion einer linearen Funktion: $\boxed{\int \frac{1}{h[g(ax+b)]}\,dx}$	$u = ax+b$ $dx = \frac{du}{a}$	
4f	Der Zähler ist gleich 1. Im Nenner steht das Produkt zweier verketteter Funktionen, wobei die inneren Funktionen gleich und linear sind: $\boxed{\int \frac{1}{g[ax+b]\cdot h[ax+b]}dx}$	$u = ax+b$ $dx = \frac{du}{a}$	$\int \frac{1}{\sin(2x+3)\cdot\cos(2x+3)}dx$ $2x+3 = u \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$ Ergibt: $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin u\cdot\cos u}du$
4g	Integral hat die Form: $\boxed{\int \frac{1}{(x^n+a)x}\,dx}$	$u = x^n + a$ $dx = \frac{du}{n\cdot x^{n-1}}$	

5.Substitution einiger spezieller Wurzeln:

	Integraltyp	Substitution	Beispiel
in Arbeit			
5a	$\int \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\, dx$		
5b			
5c			
5d			
5e			

7.Weißerstrass Substitution:

fehlt noch

8.Trigonometrische Substitution:

fehlt noch

9.Hyperbolische Substitution:

fehlt noch

10.Beispiele zur Umformung in eine der Regeln:

fehlt noch

11.Weitere Regeln und Tips zur Substitution:

Quadratwurzeln mit linearen Radikanden:

Quadratwurzeln mit linearen Radikanden zu substituieren bringt oft einen Vorteil! Beim Ersetzen von dx kommt nämlich immer eine neue Quadratwurzel ins Spiel, und dann kann man die beiden Quadratwurzeln (die dann ein Produkt oder Quotienten bilden) mit den Wurzelgesetzen zusammenfassen.