Das ist eine noch ungeprüfte Sammlung!

Definition des Tangens und Kotangens

- $\boxed{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$
- $\boxed{\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}}$

Daraus folgen:

- $\boxed{\tan x \cdot \cot x = 1}$
- $\boxed{\tan x = \dfrac{1}{\cot x}}$
- $\boxed{\cot x = \dfrac{1}{\tan x}}$

Anwendungsbeispiel aus der Integralrechnung

$\boxed{\int \tan x \, dx} = \boxed{\int \dfrac{\sin x}{\cos x} \, dx}$ Das neue Integral ist durch die Substitution u=cosx lösbar (wegen der Substitutionsregel 3a)

Trigonometrischer Pythagoras

- $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

Umgestellt nach dem Quadrat der Funktionen:

- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Umgestellt nach den Funktionen:

- $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$
- $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

Typisches Anwendungsbeispiel aus der Integralrechnung

$$\boxed{\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx} = \boxed{\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx} = \boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx} = \boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \, dx} =$$

$\boxed{\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \, dx - \int 1 \, dx}$ Beide Integrale sind nun Grundintegrale !

Formeln für den doppelten Winkel

- $\boxed{\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}$
- $\boxed{\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1}$
- $\boxed{\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}}$

Für die Praxis braucht man oft die Form, die nach dem quadratischen Term umgestellt ist:

- $\boxed{\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}}$
- $\boxed{\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}}$
- $\boxed{\tan^2 x = 1 - \dfrac{2\tan x}{\tan(2x)}}$

Anwendungsbeispiel aus der Integralrechnung

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int [1 - \cos(2x)] \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$$

Das letzte Integral ist leicht durch die Substitution u=2x lösbar.

Wie man sieht, eignen sich diese Formeln dazu, das <u>Quadrat einer Winkelfunktion</u> als „<u>verkettete Funktion mit linearer innerer Funktion</u>“ zu schreiben [z.B. cos(2x)]. Diese lassen sich leicht durch Substitution lösen (Substitutionsregel 2a).

Formeln für den halben Winkel

Additionstheoreme

❶ $\boxed{\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \sin(x_2)\cos(x_1)}$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

❷ $\boxed{\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2)}$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

❸ $\boxed{\tan(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2}}$ $x_1, x_2, (x_1 \pm x_2) \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

Anwendungsbeispiel aus der Integralrechnung

zur Zeit kein Beispiel

Summenformeln

❶ $\boxed{\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \cdot \sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)}$

❷ $\boxed{\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)}$

❸ $\boxed{\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)}$

❹ $\boxed{\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \cdot \sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)}$

❺ $\boxed{\tan x_1 + \tan x_2 = \dfrac{\sin(x_1 + x_2)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}}$

❻ $\boxed{\tan x_1 - \tan x_2 = \dfrac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}}$

Anwendungsbeispiel aus der Integralrechnung

zur Zeit kein Beispiel

Produktformeln

❶ $\boxed{\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)\right]}$

❷ $\boxed{\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x_1 + x_2) + \sin(x_1 - x_2)\right]}$

❸ $\boxed{\cos x_1 \cdot \cos x_2 = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2)\right]}$

Anwendungsbeispiel aus der Integralrechnung

zur Zeit kein Beispiel

Beziehungen zwischen Winkelfunktionen

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Aus 5a erhält man durch einfaches Formelumstellen die Hilfssätze 5b und 5c

$$\boxed{5a} \quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha \qquad \boxed{5b} \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \qquad \boxed{5c} \quad \tan^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Aus 6a erhält man durch einfaches Formelumstellen die Hilfssätze 6b und 6c

$$\boxed{6a} \quad \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha \qquad \boxed{6b} \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha} \qquad \boxed{6c} \quad \cot^2\alpha = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

Mit Satz 7-10 kann man jedes Winkelverhältnis in ein anderes umformen

(die Vorzeichen der Wurzeln hängen dabei vom Quadranten ab)

$$\boxed{7} \; \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\boxed{8} \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\boxed{9} \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\boxed{10} \quad \cot\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$